Prop: R é reduzido e tem um só primo minimal sse R é domínio.

Dem: $\Rightarrow$

Se $\langle 0 \rangle = \sqrt{\langle 0 \rangle}$ e $\exists!$ primo minimal q, então

$$\langle 0 \rangle = \bigcap_{p \text{ primo}} p = \bigcap_{\substack{p \text{ primo} \\ \text{minimal}}} p = q$$

$\therefore$ R é domínio.

$\Leftarrow$

R domínio $\Leftrightarrow$ $\langle 0 \rangle$ primo

$\Rightarrow$ $\langle 0 \rangle$ é radical e é o único primo minimal.

$\square$

Exemplo: $R = \mathbb{R}[x]/\langle x^2-1\rangle$ é reduzido mas tem 2 primos minimais. Não é um domínio.

Exemplo: $R = \mathbb{R}[x]/\langle (x-1)^2\rangle$ tem só primo minimal mas não é reduzido. Não é domínio.

Exemplo (Séries formais): $R[[x_1, \ldots, x_n]]$

$$= \left\{ \sum_{(i)} a_{(i)} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid a_{(i)} \in R \right\}$$

$(i) = (i_1, \ldots, i_n)$, $i_j \geq 0$

$x^{(i)} := x^{i_1} \ldots x^{i_n}$

operações: como em $R[x_1, \ldots, x_n]$

Notação: $a_{(0)} \equiv$ termo constante

$\mathfrak{a} := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ é um ideal tq.

$P := R[[x_1, \ldots, x_n]] \Longrightarrow P/\mathfrak{a} \simeq R$

Facto: 1. se $\mathfrak{b} \subset R$ um ideal seja

$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}P \subset P$ é um

ideal tq. $P/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}P \simeq R/\mathfrak{b}$

2. $P^\times = \left\{ \sum_{(i)} a_{(i)} x^{(i)} \;\middle|\; a_{(0)} \in R^\times \right\}$

3. Se R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, então $R^\times = R - \mathfrak{m}$, logo

$$P^\times = \left\{ \sum_{(i)} a_{(i)} x^{(i)} \;\middle|\; a_{(0)} \in R - \mathfrak{m} \right\}$$

$$= P - (\mathfrak{X} + \mathfrak{m}P)$$

$\therefore$ P é local com ideal maximal

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{m}P = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle + \mathfrak{m}P$$

Módulos:

Def: Um módulo / R é um grp. ab $(M,+)$ com uma op. $R \times M \to M$: $(x,m) \mapsto xm$ tq.

(1) $x(m+m') = xm + xm'$ e $(x+x')m = xm + x'm$

(2) $x(ym) = (xy)m$

(3) $1 \cdot m = m$

Notação: M é um R-módulo

Exercício: Dar um estrutura de R-módulo num grupo M é equivalente a dar um homomorfismo de anéis $R \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$

Exemplos: 1. R = corpo $\Rightarrow M$ é esp. vet.

2. $R = \mathbb{Z} \Rightarrow M$ grp. ab.

3. R é um R-módulo

4. $I \subset R$ um ideal $\Rightarrow I$ é R-módulo.

Def: Um submódulo N de um R-mod. M é um subgrupo ab. que é fechado para a mult. por escalares

Exemplos: 1. $M = R$, $N \subset M$ é submódulo $\Leftrightarrow N$ é um ideal

2. Se $N \subset M$ é submod. e $I \subset R$ é ideal $\Rightarrow IN = \{ \sum_i a_i n_i \mid a_i \in I, n_i \in N \}$ é um submod.

Def: Se M é R-mod. e $m \in M$ definimos
$$\mathrm{Ann}(m) = \{x \in R \mid xm = 0\}$$
(aniquilador de m) (é um ideal)

Def: $$\mathrm{Ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{Ann}(m)$$
$$= \{x \in R \mid xm = 0 \ \forall m \in R\}$$

NB: Uma estrutura de R-módulo induz uma estrutura de $\underline{R/\mathrm{Ann}(M)}$-
-módulo.

Exemplo: 1. Se $M = R$ e $x \in R$
$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in R \mid yx = 0\}$$

2. Se $M = R/\mathfrak{a}$ então $\mathrm{Ann}(M) = \underline{\mathfrak{a}}$

<u>Def</u>: Seja M um R-módulo. Define-se o <u>radical de M</u> como

$$\operatorname{rad}(M) := \bigcap_{\substack{m \in \operatorname{spec}_m R \\ m \supset \operatorname{Ann}(M)}} m$$

<u>Exemplo</u>: Se $M = R$, temos $\operatorname{Ann}(M) = \langle 0 \rangle$ e

$$\operatorname{rad}(M) = \bigcap_{m \in \operatorname{spec}_m R} m = \operatorname{rad}(R)$$

<u>NB</u>: Temos

$$\boxed{\operatorname{rad}(R/\operatorname{Ann}(M)) = \operatorname{rad}(M)/\operatorname{Ann}(M)}$$

<u>Aplicação</u>: Seja M um R-módulo e seja $x \in \operatorname{rad}(M)$. Temos

$$(1+x)m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Dem: $\kappa : R \to R/\mathrm{Ann}(M)$

$(1+x)m = 0 \iff \kappa(1+x)m = 0$

$\Rightarrow m = 0$ pois $\kappa(1+x) \in (R/\mathrm{Ann}(M))^{\times}$

$\square$

Propriedades: 1. $N \subset M$ submódulo

$\mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(N)$

$\Rightarrow \mathrm{rad}(M) \subset \mathrm{rad}(N)$

2. $\mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(M/N)$

Exemplos: Se R é local com maximal $\mathfrak{m}$ então

$\mathrm{rad}(M) = \mathfrak{m}$

Exemplos: Se R é local com maximal $\mathfrak{m}$ e $x \in \mathfrak{m}$ então

$(1+x)m = 0 \Rightarrow m = 0$

Def: Se $\#\{m \in \operatorname{Specm} R \mid m \supset \operatorname{An}(M)\} < \infty$, diz-se que M é semi-local.

Exemplo: Se R é semi-local, M é semi-local

Exemplo: $\mathbb{R}[x]/\langle x^2-1 \rangle$ é $\mathbb{R}[x]$-módulo semi-local

Def: Homomorfismos. Um homomorfismo de R-módulos $\alpha : M \to N$ é um hom. de grps ab. tq.

$$\alpha(xm) = x\alpha m \quad \forall x \in R \ \forall m \in R$$

Notações: R-morfismos, aplicações R-lineares, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, $\mathrm{Hom}(M,N)$.

Submódulos associados: $\ker\alpha = \alpha^{-1}0 \subset M$ e $\mathrm{Im}\,\alpha = \alpha M \subset N$

Propriedade universal de $\ker\alpha$?

$$\begin{tikzcd}
\ker\alpha \arrow[r, hook, "\iota"] & M \arrow[r, "\alpha"] & N \\
& K \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Isomorfismo, isomorfismo canónico: como em anéis

NB: $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ é um R-módulos com as operações óbvias

$$(\alpha+\beta)m = \alpha m + \beta m$$
$$(x\alpha)m = x(\alpha m) = \alpha(xm).$$

NB: $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ é um bi-functor

$$\alpha : L \to M \quad e \quad \beta : N \to P$$

induzem $\mathrm{Hom}_R(\alpha,\beta) : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to$
$$\to \mathrm{Hom}_R(L,P)$$

$$\varphi \longmapsto \beta \circ \varphi \circ \alpha$$

Notação: $\mathrm{Hom}(M,\beta) := \mathrm{Hom}(1_M,\beta)$
$\mathrm{Hom}(\alpha,N) := \mathrm{Hom}(\alpha,1_N)$

Def: $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M,M)$ é um anel com a operação de composição

<u>NB</u>: $\mathrm{End}_R(M) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$

é um sub-anel

<u>Def</u>: $x \in R \rightsquigarrow \mu_x \in \mathrm{End}_R(M)$

$$\mu_x(m) := xm$$

<u>NB</u>: Obtemos uma aplicação

$$\mu_R : R \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$$

que é um hom. de anéis

<u>Recorde-se</u>: dar uma estrutura de R-módulo é precisamente dar este homomorfismo.

<u>NB</u>: $\ker(\mu_R) = \mathrm{Ann}(M)$

<u>Def</u>: M diz-se <u>fiel</u> se μ_R é injetivo.

Exemplos: 1. R é um R-módulo fiel

2. R/I é um R-módulo fiel sse $I = \langle 0 \rangle$

3. $R[x_1, \dots, x_n]$ é R-mod. fiel.

4. $R/I[x_1, \dots, x_n]$ não é fiel.

Restrição de Escalares: Se R, R' são anéis tq. R' é uma R-álgebra com hom. de estrutura $\varphi: R \to R'$, então se M' é R'-módulo, então M' é R-módulo por restrição de escalares:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right] & R' \arrow[r] & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M') \end{tikzcd}$$

Exemplo: Um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ é por restrição de escalares um esp. vetorial sobre $\mathbb{R}$ porque $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra.

Exemplo: Se $\mathfrak{a} \subset R$ é um ideal, então um $R/\mathfrak{a}$-módulo é, por restrição de escalares, um R-módulo.

Reciprocamente um R-módulo M' resulta de restrição escalares de algum $R/\mathfrak{a}$ sse $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(M')$.

__Módulo quociente__: Se $M' \subset M$ é R-submódulo define-se M/M' de forma usual com hom. quociente

$$\kappa : M \to M/M'$$

que tem a prop. universal

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, hook] \arrow[rrd, bend right, "0"'] & M \arrow[r, "\kappa"] \arrow[rd, "\alpha"] & M/M' \arrow[d, dashed, "\exists! \beta"] \\
& & N
\end{tikzcd}$$

__Def__: Se $N \subset M$ é subconjunto, define-se o submódulo $\langle N \rangle$ gerado por N como

$$\langle N \rangle = \bigcap_{\substack{N' \subset M \text{ submod.} \\ N' \supset N}} N'$$

$= \left\{ \sum_i a_i n_i \mid a_i \in R, n_i \in N \right\}$

<u>Exemplo</u>: Se $M = R/I$ então

$M = \langle \kappa(1) \rangle$

<u>Def</u>: Se M é R-módulo tq. $\exists m \in M$ satisfazendo $M = \langle m \rangle$

diz-se que M é um R-módulo <u>cíclico</u>.

<u>NB</u>: Se M é cíclico com gerador m, então

$$M \simeq R / \mathrm{Ann}(m)$$

Se $N, L \subset M$ são submódulos tq. $L \subset N$, então

$$M/N \quad , \quad M/L \quad , \quad N/L$$

Temos

Teorema: $\boxed{\dfrac{M/L}{N/L} \simeq \dfrac{M}{N}}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\kappa'"'] & M/N \arrow[d, dashed, "\simeq"] \\ M/L \arrow[r, "\kappa''"] & \dfrac{M/L}{N/L} \end{tikzcd}$$

Def: $N, L \subset M$ submódulo

$$N + L = \langle N \cup L \rangle$$

Teorema: $\boxed{\dfrac{N+L}{N} \simeq \dfrac{L}{N\cap L}}$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\text{sobrej}"] & N+L \arrow[r] & \dfrac{N+L}{N} \end{tikzcd}$$

núcleo é $N \cap L$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "i"'] & L/N\cap L \arrow[d, dashed, "\simeq"] \\ N+L \arrow[r, "\kappa'"'] & \dfrac{N+L}{N} \end{tikzcd}$$